Problem Set 1

1. **[2 points]** Let us consider all 6-digit numbers written with digits 1, 2, 3, 4. How many of them have four different digits?

   Answer: 1 560.

   Solution. If we use one of the digits three times and all the other digits once, we get $4 \cdot \frac{6!}{3!} = 480$ different numbers. (There are four ways to choose one of the digits that is to be used three times. If all the digits were different, there would be 6! different ways of arranging them in a row. But as we have one of the digits three times, the number of permutations gets 3! times less.)

   If we use one of the digits twice, another one twice, and two remaining digits once, we get $\binom{4}{2} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 1\,080$ numbers. Indeed, there are $\binom{4}{2} = 6$ ways of picking two digits to be used twice, and after that there are $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$ ways of arranging the digits.

   Hence, there are $480 + 1\,080 = 1\,560$ different numbers that satisfy the task.

2. **[2 points]** The length, width and height of a cuboid are pairwise different integers. If its length is increased by 40%, its height is increased by 75% and its width is decreased by 20%, its volume becomes by 57.6 greater than the initial volume. Find the largest possible width of the initial cuboid.

   Answer: 30.

   Solution. Let x, y, z be the length, height and width of the cuboid respectively. After its dimensions have been changed, the corresponding values are $1.4x$, $1.75y$, $0.8z$. According to the task, we get that $1.4x \cdot 1.75y \cdot 0.08z - xyz = 57.6$, and therefore $xyz = 60$. As x, y, z are pairwise different integers, the largest possible value of y is equal to 30 (and the remaining dimensions are equal to 1 and 2).

3. **[2 points]** There are 50 litres of 100% alkali in the barrel. On the first day some amount of alkali is taken form the barrel, and it is replaced with the same amount of water, after which the solution is thoroughly stirred. The next day some amount of the solution is taken from the barrel, and it is also replaced with water. It is known that the resulting solution of alkali has a concentration of 31.68%, and that the volume of liquid taken from the barrel on the second day is twice as large as the amount taken on the first day. How much alkali was taken from the barrel on the first day? Express the answer in litres. (All the amounts are measured in litres, and the volume concentration is indicated in the task.)

   Answer: 14.

   Solution. Let us denote the amount of alkali taken from the barrel on the first day as x (litres). After the barrel is refilled with water, the portion of alkali in the barrel gets equal to $\frac{50-x}{50}$. Then on the second day $2x$ of the mixture was taken from the barrel. Of these, $2x \cdot \frac{50-x}{50}$ litres is alkali. Hence, there are $50 - x - \frac{50x-x^2}{25}$ litres of alkali remaining, which makes up $50 \cdot 0.3168 = 15.84$ litres according to the task. Therefore, we obtain an equation $50 - x - \frac{50x-x^2}{25} = 15.84$, $x^2 - 75x + 854 = 0$, which has two solutions $x = 61$ and $x = 14$. The former value does not satisfy the task, hence, the amount in question is equal to 14 litres.

4. **[3 points]** In a trapezoid $ABCD$ lateral sides AB and CD are equal to each other, and $\tan \angle CAD = 7$. Find the altitude of the trapezoid given that its area is equal to 63.

   Answer: 21.

   Solution. Let CH and BK be altitudes of the trapezoid. Let us also denote $\angle CAD = \alpha$ (from the task we know that $\tan\alpha = 7$). As the trapezoid is isosceles, triangles ABK and DCH are equal to each other. Therefore, $AK = DH$ and $\frac{BC+AD}{2} = \frac{HK+AD}{2} = \frac{HK+AH+HD}{2} = \frac{AH+AH}{2} = AH$. The area of the trapezoid A is equal to $\frac{BC+AD}{2} \cdot CH = AH \cdot CH = AC\cos\alpha \cdot AC\sin\alpha$. As $\tan\alpha = 7$, we get that $\cos\alpha = \frac{1}{7}\sin\alpha$, and so $A = \frac{1}{7}AC^2\sin^2\alpha$. From the task $A = 63$, thus $63 = \frac{1}{7}AC^2\sin^2\alpha$, $AC\sin\alpha = 21$. We only need to notice that $AC\sin\alpha$ is the altitude to the trapezoid, and so the answer is 21.

5. **[3 points]** How many integer values of x satisfy the inequality $\sqrt{\sqrt{2x+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} \geq x$?

Answer: 4.

Solution. The domain of the inequality is given by $\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geq -\frac{3}{2}$, which is equivalent to the inequality $2x+\frac{9}{4} \geq 0$; hence $x \geq -\frac{9}{8}$. The values $x \in \left[-\frac{9}{8};\ 0\right]$ satisfy the initial inequality (as the left side is non-negative and the right side is non-positive). If $x > 0$, raising both sides to the second power, we obtain

$$\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geq x^2 - \frac{3}{2}.$$

If $x \in \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, the right side of the inequality is non-positive, and so it holds. Otherwise, that is if $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$, squaring both sides of the inequality yields $2x+\frac{9}{4} \geq x^4 - 3x^2 + \frac{9}{4}$, $x^4 - 3x^2 - 2x \leq 0$, $x^3 - 3x - 2 \leq 0$, $(x+1)^2(x-2) \leq 0$, and thus $x \leq 2$.
Summarising the results, we obtain $x \in \left[-\frac{9}{8};\ 0\right] \cup \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ 2\right]$, i.e. $x \in \left[-\frac{9}{8};\ 2\right]$. There are four integer values on this interval.

6. **[3 points]** Solve the equation $\sqrt{8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3}} = 2\cos\frac{2\pi x}{3} + 2\tan\frac{2\pi x}{3}$. As the answer, write down its largest negative root. If it does not exist, write 2023 instead.

Answer: -0.25.

Solution. Squaring both sides of the equation, we obtainм

$$8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3} = 4\cos^2\frac{2\pi x}{3} + 8\sin\frac{2\pi x}{3} + 4\tan^2\frac{2\pi x}{3},$$

and so $12\cos^4\frac{2\pi x}{3} - 25\cos^2\frac{2\pi x}{3} + 12 = 0$, hence, $\cos^2\frac{2\pi x}{3} = \frac{3}{4}$ or $\cos^2\frac{2\pi x}{3} = \frac{4}{3}$. Since $\cos^2\frac{2\pi x}{3} \leq 1$, we have $\cos\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\frac{1}{4} + \frac{3}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituting the values of x into the initial equation, we get that its right side is negative for $x = \pm\frac{5}{4} + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, and positive for $x = \pm\frac{1}{4} + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Therefore, the solutions of the equation are $x = \pm\frac{1}{4} + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, and its largest negative root is $-\frac{1}{4} = -0{,}25$.

7. **[3 points]** Find the smallest value of parameter t for which the equation $x^2 - tx\sqrt{3-2x-x^2} + t^2 = 0$ has at least one solution.

Answer: -1.

Solution. The equation is defined if $3-2x-x^2 \geq 0$. Completing the square in the left side of the equation, we can rewrite it as

$$\left(x - \frac{t\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right)^2 + \frac{t^2(x+1)^2}{4} = 0.$$

As both terms in the left side are non-negative, the equality can hold only if both of them are equal to zero. The second term turns to zero either if $x=-1$ or if $t=0$. If $x=-1$, the first term of the equation becomes $(-t-1)^2$, and so $t=-1$. If $t=0$, the equation becomes $x^2=0$, which has only one solution $x=0$. Consequently, the given equation for $t=0$ has a solution $x=0$, for $t=-1$ has a solution $x=-1$, and it has no solutions for all other values of tThe smallest value of the parameter, fro which it has at least one solution, is $t=-1$.

8. **[3 points]** Solve the inequality

$$\frac{1}{\left|\log_2\frac{x}{10}\right| - 2} \leq \frac{1}{\left|\log_4\frac{x^2}{400}\right| - 1}.$$

As the answer write the number of integer solutions on a closed interval $-4 \leq x \leq 54$.

Answer: 41.

Solution. The logarithms in the inequality exist if $x > 0$. As $\log_4 \frac{x^2}{400} = \log_2 \frac{x}{20} = \log_2 \frac{x}{10} - 1$, the inequality can be written as

$$\frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10}\right| - 2} \leq \frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10} - 1\right| - 1}.$$

Denoting $\log_2 \frac{x}{10} - 1 = t$, we obtain the inequality

$$\frac{1}{|t+1| - 2} \leq \frac{1}{|t| - 1}. \tag{1}$$

Let us consider three possible cases: $t \leq -1$, $-1 < t < 0$, $t \geq 0$.

1) For $t \leq -1$ the inequality (1) is equivalent to each of the following inequalities $\frac{1}{-t-3} \leq \frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3} \geq \frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)} \leq 0$, and thus $-3 < t < 1$, i.e. $-3 < \log_2 \frac{x}{10} - 1 < -1$, $\frac{1}{4} < \frac{x}{10} < 1$, $\frac{5}{2} < x < 10$.

2) If $-1 < t < 0$ then from (1) it follows that $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)} \leq 0$, and so $t < -1$ or $0 \leq t < 1$. Then in this case inequality (1) has no solutions.

3) If $t \geq 0$ then (1) becomes $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{t-1}$. This inequality holds for all values of $t \geq 0$, except for $t = 1$. From here $\log_2 \frac{x}{10} \geq 1$ and $\log_2 \frac{x}{10} \neq 2$, consequently, $x \in [20; +\infty)$ и $x \neq 40$.

All in all, the solution set of the inequality is given by $x \in \left(\frac{5}{2}; 10\right) \cup [20; 40) \cup (40; +\infty)$. There are 41 integer solutions on the closed interval $[-4; 54]$.

Problem Set 2.

1. **[2 points]** The sides of a triangle are equal to $a = 4$, $b = 13$ and $c = 15$. Find the radii of its circumcircle R and its incircle r. As the answer, write the difference $R - r$.

   Answer: 6.625.

   Solution. The semiperimeter of the triangle p is equal to $\frac{4+13+15}{2} = 16$, and so its area A is given by $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$. The radius of the circumcircle is $R = \frac{abc}{4A} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8}$. The radius of the incircle is $r = \frac{A}{p} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. Therefore, $R - r = \frac{53}{8} = 6.625$.

2. **[3 points]** The altitude of a right circular cone is equal to $\frac{18}{\pi}$, and the radius of its base is equal to 3. Find the largest volume of a right circular cylinder which can be inscribed into the cone. (One of the bases of a cylinder lies in the base of the cone, and the circumference of the second base lies on the lateral surface of a cone.)

   Answer: 24.

   Solution. Let ABC be the axial section of the cone (AB being its base) and let $KLMN$ be the axial section of the cylinder inscribed into the cone such that $K \in AC$, $L \in BC$, $M, N \in AB$. Let us also denote $KL = 2r$, $KN = h$. Using similarity of triangles, we get equations $\frac{h}{18/\pi} = \frac{AK}{AC}$, $\frac{r}{3} = \frac{CK}{AC}$.
   Adding these two yields $\frac{\pi h}{18} + \frac{r}{3} = 1$, and consequently, $h = \frac{18}{\pi} - \frac{6r}{\pi}$.
   The volume of the cylinder V is equal to $V = \pi r^2 h = 18r^2 = 6r^3$. To find its maximum, we compute the derivative $V'(r) = 36r - 18r^2 = 18r(2 - r)$ and we notice that the derivative is positive for $r < 2$ and negative for $r > 2$. Therefore, $r = 2$ is a point of maximum, and the largest volume is $V(2) = 24$.

3. **[2 points]** The cyclist goes from a far-away village to the ferry terminal in order to catch a ferry. At first, he goes at 12 km/h, and 10 minutes before the departure of the ferry, he increases his speed to 16 km/h. As a result, he is 5 minutes late. How many minutes before the departure of the ferry did he have to increase the speed to 16 km/h in order to arrive to the ferry terminal five minutes in advance (i.e. 5 minutes before the departure of the ferry)?

   Answer: 50.

   Solution. Let us denote the moment he increases his speed as $t = 0$. He gets to the ferry terminal in 15 minutes going at 16 km/h, which means that he is at the distance of $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ km from the terminal.
   Let us say that in order to arrive to the terminal 5 minutes in advance he should have increased his speed at the moment of time $(-t_0)$ (i.e. t_0 minutes earlier than he did it in reality). At that moment he was at the distance of $4 + \frac{t_0}{5}$ from the terminal. Riding with the speed of 16 km/h, he would overcome this distance in $\left(4 + \frac{t_0}{5}\right) : 16 = \frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}$ hours, that is in $60\left(\frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}\right) = 15 + \frac{3t_0}{4}$ minutes.
   As he should arrive 5 minutes prior to the departure of the ferry, we get the equation $-t_0 + 15 + \frac{3t_0}{4} = 5$, and $t_0 = 40$. It implies he should have increased his speed 40 minutes earlier than he did it, that is, 50 minutes before the departure of the ferry.

4. **[2 points]** How many 6-digit numbers are there such that they are written with digits 1, 3, 5, 7, 9 and at least two identical digits are next to each other?

   Answer: 10 505.

   Solution. The total quantity of such numbers is equal to 5^6 (we choose one of five digits for each of 6 places). To get a number with no identical digits next to each other, we can choose the first digit in five different ways. After that, for each of the next digits we have only 4 options (we cannot use the digit used at the previous place). The quantity of these numbers is $5 \cdot 4^5$. Obviously, all the other numbers have at least one pair of identical digits next to each other, and their quantity is $5^6 - 5 \cdot 4^5 = 10\,505$.

5. **[3 points]** Find all solutions of the equation $\frac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x+\cos \pi x} = \frac{\cos 6\pi x}{\cos \pi x-\sin \pi x}$ on the open interval $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. As the answer, write the sum of the solutions. If there are no solutions on the interval, write 2023 instead.

Answer: 0.5.

Solution. The initial equation is equivalent to the equation

$$\sin 6\pi x(\cos \pi x - \sin \pi x) = \cos 6x(\sin \pi x + \cos \pi x)$$

under condition that $(\sin \pi x + \cos \pi x)(\cos \pi x - \sin \pi x) \neq 0$, i.e. $\cos 2\pi x \neq 0$. We have:

$$\sin 6\pi x \, \cos \pi x - \cos 6\pi x \, \sin \pi x = \cos 6\pi x \, \cos \pi x + \sin 6\pi x \, \sin \pi x,$$

$$\sin 5\pi x = \cos 5\pi x, \quad \tan \, 5\pi x = 1, \quad x = \frac{1}{20} + \frac{n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

The values that satisfy the inequalities $0 < x < \frac{1}{2}$, $\cos 2\pi x \neq 0$ are $x = \frac{1}{20}$ и $x = \frac{9}{20}$. The sum of these numbers is equal to 0.5.

6. **[3 points]** How many integer values of x satisfy the inequality $\log_{0.5}\left(3 - \sqrt{2^{-x}-1}\right) > x$?

Answer: 2.

Solution. The inequality is equivalent to the system of inequalities

$$\begin{cases} 2^{-x} - 1 \geq 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x}-1} > 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x}-1} < 2^{-x}. \end{cases}$$

Substituting $y = 2^{-x}$, we get $y \geq 1$, $\sqrt{y-1} < 3$, $3 - y < \sqrt{y-1}$. The first two inequalities yield $1 \leq y < 10$. And the third inequality can be solved as follows:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - y < 0, \\ y - 1 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - y \geq 0, \\ (3-y)^2 < y - 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y > 3, \\ \begin{cases} y \leq 3, \\ 2 < y < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow y > 2$$

Therefore, $2 < y < 10$, and thus $2 < 2^{-x} < 10$, $1 < -x < \log_2 10$, $x \in (-\log_2 10; -1)$. There are two integer values on this interval; they are $x = -3$ and $x = -2$.

7. **[3 points]** Find the number of integer values of parameter t such that for each of them the equation $\sqrt{x^4 + x^2 - 5t^2} = \sqrt{x^4 - 4tx}$ has exactly one solution.

Answer: 3.

Solution. The equation is equivalent to $x^4 + x^2 - 5t^2 = x^4 - 4tx$ under condition that $x^4 - 4tx \geq 0$. The solutions of the equation are $x_1 = -5t$ and $x_2 = t$. When substituting x_1 into the inequality, we obtain $x(x^3 - 4t) = 5t^2(125t^2 + 4) \geq 0$, which holds for all values of t. Therefore, $x_1 = -5t$ is a root for any t. For $x_2 = t$ we have $x(x^3 - 4t) \geq 0$, $t^2(t^2 - 4) \geq 0$, which is true if $t \in (-\infty; -2] \cup 0 \cup [2; \infty)$. The roots $x_1 = -5t$ and $x_2 = t$ coincide if $t = 0$. Consequently, the initial equation has two distinct solutions if $t \leq -2$ or $t \geq 2$, and it has one root if $-2 < t < 2$. All in all, there are three integer values of parameter that satisfy the task.

8. **[3 points]** Diagonals of a quadrilateral $PQRS$ intersect at point O. It is known that $PR \perp QS$, $PS \parallel QR$, $QR = 91$, $OS = 12$, and the radius of the incircle of triangle ORS is equal to 5. Find the radius of the incircle of triangle OPS.

Answer: 2.

Solution. Let us consider triangle ORS. Let A, B, C be points of tangency of the incircle of triangle ABC with its sides OS, OR, RS respectively. Let $BR = x$. As $\angle O = 90°$, $OA = OB = r = 5$. Using the equality of tangent lines drawn to the circle from the same point, we obtain $CR = BR = x$, $AS = OS - r = 7$, $CS = AS = 7$. Hence $OR = x + 5$, $OS = 12$, $RS = x + 7$, and the Pythagorean theorem yields $(x + 7)^2 = (x + 5)^2 + 12^2$. Solving the equation obtained, we get that $x = 30$ and $OR = 35$.
Now we know two sides in a right triangle OQR, and so we can find that $OQ = \sqrt{QR^2 - OR^2} = \sqrt{91^2 - 35^2} = 84$; hence the radius of the incircle of OQR is equal to $\frac{84+35-91}{2} = 14$.
Triangles OSP and OQR are similar, the coefficient of similarity being $\frac{OS}{OQ} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$. Consequently, the radius of the incircle of OPS is $\frac{1}{7} \cdot 14 = 2$.

Вариант 1

1. **[2 балла]** Рассмотрим все 6-значные числа, записанные с помощью цифр 1, 2, 3, 4. В скольких из них присутствуют четыре различные цифры?

   Ответ: 1 560.

   Решение. Если мы используем одну из цифр трижды, а оставшиеся цифры по одному разу, то мы сможем составить $4 \cdot \frac{6!}{3!} = 480$ различных чисел. (Есть 4 способа выбрать одну из цифр, которая будет использована трижды. Если бы все цифры были различными, то было бы 6! способов их расстановки, но так как среди них есть три одинаковые, количество перестановок получается в 3! раз меньше.)

   Если мы используем одну из цифр дважды, ещё одну дважды, а оставшиеся цифры по одному разу, то получим $\binom{4}{2} \cdot \frac{6!}{2!\cdot 2!} = 1\,080$ чисел. И вправду, есть $C_4^2 = 6$ способов выбрать две цифры, которые будут использованы дважды, а затем есть $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ способов расстановки цифр.

   Следовательно, всего есть $480 + 1\,080 = 1\,560$ чисел, которые удовлетворяют условию задачи.

2. **[2 балла]** Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда – попарно различные целые числа. Если его длину увеличить на 40%, его высоту увеличить на 75%, а его ширину уменьшить на 20%, то его объём станет на 57,6 больше начального объёма.Найдите наибольшую возможную ширину этого прямоугольного параллелепипеда.

   Ответ: 30.

   Решение. Пусть x, y, z – длина, высота и ширина прямоугольного параллелепипеда соответственно. После того как все его измерения поменялись, новые их значения – это $1{,}4x$, $1{,}75y$, $0{,}8z$. ПО условию получаем $1{,}4x \cdot 1{,}75y \cdot 0{,}08z - xyz = 57{,}6$, и поэтому $xyz = 60$. Так как x, y, z – попарно различные целые числа, наибольшее значение y равно 30 (а оставшиеся измерения равны 1 и 2).

3. **[2 балла]** В бочонке 50 литров 100% щёлочи. В первый день некоторое количество щёлочи взяли из бочонка, заменив его тем же количеством воды, после чего раствор тщательно перемешали. На следующий день некоторое количество раствора взяли из бочонка, и тоже заменили его водой. Известно, что концентрация полученного раствора щёлочи равна 31,68%, а также, что количество жидкости, взятое из бочонка во второй день, в два раза больше, чем в первый день. Сколько литров щёлочи было взято из бочонка в первый день? (Все количества измеряются в литрах, указана объёмная концентрация.)

   Ответ: 14.

   Решение. Обозначим количество щёлочи, взятой из бочонка в первый день, через x (литров). После того, как бочонок наполнили водой, доля щёлочи в бочонки становится равна $\frac{50-x}{50}$. Затем на второй день из бочонка взяли $2x$ литров смеси. Из них $2x \cdot \frac{50-x}{50}$ составляет щёлочь. Следовательно, остаётся $50 - x - \frac{50x-x^2}{25}$ литров щёлочи, что должно составить $50 \cdot 0.3168 = 15.84$ литров согласно условию. Отсюда получаем уравнение $50 - x - \frac{50x-x^2}{25} = 15.84$, $x^2 - 75x + 854 = 0$, которое имеет два решения: $x = 61$ и $x = 14$. Первое из них не удовлетворяет условию, следовательно, искомое количество равно 14 литрам.

4. **[3 балла]** В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны друг другу, а $\operatorname{tg} \angle CAD = 7$. Найдите высоту трапеции, если известно, что её площадь равна 63.

   Ответ: 21.

   Решение. Пусть CH и BK – высоты трапеции. Обозначим также $\angle CAD = \alpha$ (из условия мы знаем, что $\operatorname{tg} \alpha = 7$). Так как трапеция равнобедренная, треугольники ABK и DCH равны между собой. Следовательно, $AK = DH$ и $\frac{BC+AD}{2} = \frac{HK+AD}{2} = \frac{HK+AH+HD}{2} = \frac{AH+AH}{2} = AH$. Площадь трапеции S равна $\frac{BC+AD}{2} \cdot CH = AH \cdot CH = AC \cos\alpha \cdot AC \sin\alpha$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = 7$, получаем $\cos\alpha = \frac{1}{7}\sin\alpha$, а значит, $A = \frac{1}{7}AC^2 \sin^2\alpha$. По условию $S = 63$, следовательно $63 =$

$\frac{1}{7}AC^2\sin^2\alpha$, $AC\sin\alpha = 21$. Остаётся заметить, что $AC\sin\alpha$ равно высоте трапеции, поэтому 21 и есть ответ задачи.

5. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\sqrt{\sqrt{2x+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} \geqslant x$?

Ответ: 4.

Решение. Область допустимых значений исходного неравенства задаётся условием $\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geqslant -\frac{3}{2}$, которое равносильно неравенству $2x+\frac{9}{4} \geqslant 0$, откуда $x \geqslant -\frac{9}{8}$.
Значения $x \in [-\frac{9}{8};\ 0]$ удовлетворяют исходному неравенству (так как левая часть неотрицательна, а правая часть неположительна), а при $x > 0$ оно равносильно неравенству $\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geqslant x^2-\frac{3}{2}$.
При $x \in \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ правая часть неположительна, и неравенство выполнено. Если же $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$, то неравенство равносильно каждому из неравенств $2x+\frac{9}{4} \geqslant x^4-3x^2+\frac{9}{4}$, $x^4-3x^2-2x \leqslant 0$, $x^3-3x-2 \leqslant 0$, $(x+1)^2(x-2) \leqslant 0$, откуда $x \leqslant 2$.
Подводя итоги, получаем $x \in \left[-\frac{9}{8};\ 0\right] \cup \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ 2\right]$, т.е. множество решений неравенства – отрезок $\left[-\frac{9}{8};\ 2\right]$. На этом отрезке есть 4 целых числа.

6. **[3 балла]** Решите уравнение $\sqrt{8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3}} = 2\cos\frac{2\pi x}{3}+2\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{3}$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень. Если его не существует, напишите вместо этого 2023.

Ответ: $-0{,}25$.

Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем

$$8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3} = 4\cos^2\frac{2\pi x}{3}+8\sin\frac{2\pi x}{3}+4\operatorname{tg}^2\frac{2\pi x}{3},$$

откуда $12\cos^4\frac{2\pi x}{3}-25\cos^2\frac{2\pi x}{3}+12 = 0$, откуда $\cos^2\frac{2\pi x}{3} = \frac{3}{4}$ или $\cos^2\frac{2\pi x}{3} = \frac{4}{3}$. Поскольку $\cos^2\frac{2\pi x}{3} \leqslant 1$, то $\cos\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\frac{1}{4}+\frac{3}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подстановка полученных значений x в исходное уравнение показывает, что при $x = \pm\frac{5}{4}+3k$ правая часть исходного уравнения отрицательна, и решениями являются лишь $x = \pm\frac{1}{4}+3k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при которых правая часть положительна). Следовательно, наибольший отрицательный корень – это $-\frac{1}{4} = -0{,}25$.

7. **[3 балла]** При каком наименьшем значении параметра t уравнение $x^2-tx\sqrt{3-2x-x^2}+t^2 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: -1.

Решение. Уравнение имеет смысл при $3-2x-x^2 \geqslant 0$. Выделив в левой части полный квадрат, уравнение можно привести к виду

$$\left(x-\frac{t\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right)^2+\frac{t^2(x+1)^2}{4} = 0.$$

Так как оба слагаемых в правой части неотрицательны, равенство возможно, только если они оба равны нулю. Второе слагаемое обращается в ноль либо при $x = -1$, либо при $t = 0$. Если $x = -1$, то первое слагаемое принимает вид $(-t-1)^2$, поэтому $t = -1$. Если $t = 0$, то уравнение принимает вид $x^2 = 0$, и у него есть одно решение $x = 0$. Следовательно, данное уравнение при $t = 0$ имеет решение $x = 0$, при $t = -1$ имеет решение $x = -1$, а при остальных t не имеет решений. Наименьшее значение параметра, при котором есть решение – это $t = -1$.

8. **[3 балла]** Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2\frac{x}{10}\right|-2} \leqslant \frac{1}{\left|\log_4\frac{x^2}{400}\right|-1}.$$

В ответе укажите количество целочисленных решений неравенства на отрезке $-4 \leqslant x \leqslant 54$.

Ответ: 41.

Решение. Логарифмы в неравенстве существуют при $x > 0$. Поскольку $\log_4 \frac{x^2}{400} = \log_2 \frac{x}{20} = \log_2 \frac{x}{10} - 1$, неравенство принимает вид

$$\frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10}\right| - 2} \leqslant \frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10} - 1\right| - 1}.$$

Полагая $\log_2 \frac{x}{10} - 1 = t$, получаем

$$\frac{1}{|t+1| - 2} \leqslant \frac{1}{|t| - 1}. \qquad (1)$$

Рассмотрим три возможных случая: $t \leqslant -1$, $-1 < t < 0$, $t \geqslant 0$.

1) При $t \leqslant -1$ неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{-t-3} \leqslant \frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3} \geqslant \frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)} \leq 0$, откуда $-3 < t < 1$, т. е. $-3 < \log_2 \frac{x}{10} - 1 < -1$, $\frac{1}{4} < \frac{x}{10} < 1$, $\frac{5}{2} < x < 10$.

2) Если $-1 < t < 0$, то из (1) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)} \leqslant 0$, откуда $t < -1$ или $0 \leqslant t < 1$. В этом случае неравенство (1) не имеет решений.

3) При $t \geqslant 0$ из (1) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{t-1}$. Это неравенство является верным при всех $t \geqslant 0$, кроме $t = 1$. Отсюда $\log_2 \frac{x}{10} \geqslant 1$ и $\log_2 \frac{x}{10} \neq 2$, следовательно, $x \in [20; +\infty)$ и $x \neq 40$.

Итак, множеством решений неравенства является $x \in \left(\frac{5}{2}; 10\right) \cup [20; 40) \cup (40; +\infty)$. На отрезке $[-4; 54]$ есть 41 целое решение.

Вариант 2.

1. **[2 балла]** Стороны треугольника равны 4, 13 и 15. Найдите радиусы его описанной окружности R и его вписанной окружности r. В ответе запишите разность $R - r$.

   Ответ: 6,625.

   Решение. Полупериметр треугольника p равен $\frac{4+13+15}{2} = 16$, поэтому его площадь A есть $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$. Радиус описанной окружности – это $R = \frac{abc}{4A} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8}$. Радиус вписанной окружности – это $r = \frac{A}{p} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $R - r = \frac{53}{8} = 6.625$.

2. **[3 балла]** Высота прямого кругового конуса равна $\frac{18}{\pi}$, а радиус его основания равен 3. Найдите наибольшее значение объёма прямого кругового цилиндра, который можно вписать в этот конус. (Одно из оснований цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания – на боковой поверхности конуса.)

   Ответ: 24.

   Решение. Пусть ABC – осевое сечение конуса (AB – его основание) и пусть $KLMN$ – осевое сечение цилиндра, вписанного в конус такое, что $K \in AC$, $L \in BC$, $M, N \in AB$. Обозначим также $KL = 2r$, $KN = h$. Из подобия треугольников получаем уравнения $\frac{h}{18/\pi} = \frac{AK}{AC}$, $\frac{r}{3} = \frac{CK}{AC}$.
   Складывая эти равенства, имеем $\frac{\pi h}{18} + \frac{r}{3} = 1$ и, следовательно, $h = \frac{18}{\pi} - \frac{6r}{\pi}$.
   Объём цилиндра V равен $V = \pi r^2 h = 18r^2 = 6r^3$. Чтобы найти его максимум, вычисляем производную $V'(r) = 36r - 18r^2 = 18r(2-r)$ и заметим, что производная положительна при $r < 2$, отрицательна при $r > 2$. Значит, $r = 2$ –точка максимума, а наибольший объём равен $V(2) = 24$.

3. **[2 балла]** Велосипедисту едет из далёкой деревни на паромный терминал, чтобы успеть на паром. Сначала он едет со скоростью 12 км/ч, а когда до отправления парома остаётся 10 минут, он увеличивает скорость до 16 км/ч. В результате он опаздывает на 5 минут. За сколько минут до отправления парома ему нужно было увеличить скорость до 16 км/ч, чтобы прибыть в паромный терминал с запасом в 5 минут (т.е. за 5 минут до отправления парома)?

   Ответ: 50.

   Решение. Будем считать, что велосипедист увеличивает скорость в момент времени $t = 0$. Он прибывает в терминал через 15 минут, при этом он едет со скоростью 16 км/ч, поэтому он находится на расстоянии $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ км от терминала.
   Пусть для того чтобы прибыть в терминал за 5 минут до отправления паром ему надо было увеличить скорость в момент времени $(-t_0)$ (т. е. на t_0 минут раньше, чем он на самом деле это сделал). В этот момент он находился на расстоянии $4 + \frac{t_0}{5}$ от терминала. При езде со скоростью 16 км/ч он бы преодолел это расстояние за $\left(4 + \frac{t_0}{5}\right) : 16 = \frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}$ часов, то есть за $60\left(\frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}\right) = 15 + \frac{3t_0}{4}$ minutes.
   Поскольку ему надо прибыть за 5 минут до отправления парома, получаем уравнение $-t_0 + 15 + \frac{3t_0}{4} = 5$, и поэтому $t_0 = 40$. Следовательно, он должен был увеличить скорость на 40 минут ранее, чем он это сделал, то есть за 50 минут до отправления парома.

4. **[2 балла]** Сколько существует шестизначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 9 и таких, что хотя бы две одинаковые цифры идут подряд?

   Ответ: 10 505.

   Решение. Общее количество таких чисел равно 5^6 (выбираем одну из 5 цифр для каждого из 6 мест). Чтобы получить число, у которого нет рядом стоящих одинаковых цифр, можем выбрать первую цифру пятью способами. После этого каждую из следующих цифр можем выбирать четырьмя способами (так как нельзя использовать цифру, стоящую на предыдущей позиции). Количество таких чисел равно $5 \cdot 4^5$. Очевидно, все остальные числа имеют хотя бы две одинаковые цифры подряд, а их количество равно $5^6 - 5 \cdot 4^5 = 10\,505$.

5. **[3 балла]** Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x + \cos \pi x} = \frac{\cos 6\pi x}{\cos \pi x - \sin \pi x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. В ответе укажите сумму найденных решений. Если решений на интервале нет, запишите 2023.

Ответ: 0,5.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 6\pi x(\cos \pi x - \sin \pi x) = \cos 6x(\sin \pi x + \cos \pi x)$$

при условии $(\sin \pi x + \cos \pi x)(\cos \pi x - \sin \pi x) \neq 0$, т. е. $\cos 2\pi x \neq 0$. Имеем:

$$\sin 6\pi x \, \cos \pi x - \cos 6\pi x \, \sin \pi x = \cos 6\pi x \, \cos \pi x + \sin 6\pi x \, \sin \pi x,$$

$$\sin 5\pi x = \cos 5\pi x, \quad \operatorname{tg} 5\pi x = 1, \quad x = \frac{1}{20} + \frac{n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Условиям $0 < x < \frac{1}{2}$, $\cos 2\pi x \neq 0$ удовлетворяют $x = \frac{1}{20}$ и $x = \frac{9}{20}$. Сумма этих чисел равна 0,5.

6. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\log_{0,5}\left(3 - \sqrt{2^{-x} - 1}\right) > x$?

Ответ: 2.

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2^{-x} - 1 \geqslant 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} > 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} < 2^{-x}. \end{cases}$$

Положив $y = 2^{-x}$, получаем $y \geqslant 1$, $\sqrt{y-1} < 3$, $3 - y < \sqrt{y-1}$. Из первых двух неравенств получаем, что $1 \leqslant y < 10$. А третье неравенство можно решить, например, так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - y < 0, \\ y - 1 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - y \geqslant 0, \\ (3-y)^2 < y - 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y > 3, \\ \begin{cases} y \leqslant 3, \\ 2 < y < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow y > 2$$

Итак, $2 < y < 10$, поэтому $2 < 2^{-x} < 10$, $1 < -x < \log_2 10$, $x \in (-\log_2 10; -1)$. На этом промежутке два целых значения переменной – это $x = -3$ и $x = -2$.

7. **[3 балла]** Найдите количество целых значений параметра t, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + x^2 - 5t^2} = \sqrt{x^4 - 4tx}$ имеет ровно одно решение.

Ответ: 3.

Решение. Уравнение эквивалентно уравнению $x^4 + x^2 - 5t^2 = x^4 - 4tx$ при условии $x^4 - 4tx \geqslant 0$. Решениями уравнения являются $x_1 = -5t$ и $x_2 = t$. При подстановке x_1 в неравенство получаем $x(x^3 - 4t) = 5t^2(125t^2 + 4) \geqslant 0$, что выполнено при любых значениях t. Значит, $x_1 = -5t$ является корнем при любом t. Для значения $x_2 = t$ получаем $x(x^3 - 4t) \geqslant 0$, $t^2(t^2 - 4) \geqslant 0$, что верно при $t \in (-\infty; -2] \cup 0 \cup [2; \infty)$. Корни $x_1 = -5t$ и $x_2 = t$ совпадают при $t = 0$. Поэтому исходное уравнение имеет два различных корня при $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 2$; один корень при $-2 < t < 2$. Итак, условию задачи удовлетворяют три целых значения параметра.

8. **[3 балла]** Диагонали четырёхугольника $PQRS$ пересекаются в точке O. Известно, что $PR \perp QS$, $PS \parallel QR$, $QR = 91$, $OS = 12$, а радиус окружности, вписанной в треугольник ORS, равен 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник OPS.

Ответ: 2.

Решение. Рассмотрим треугольник ORS. Пусть A, B, C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами OS, OR, RS соответственно. Пусть $BR = x$. Так как $\angle O = 90°$, $OA = OB = r = 5$. Используя равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $CR = BR = x$, $AS = OS - r = 7$, $CS = AS = 7$. Значит, $OR = x + 5$, $OS = 12$, $RS = x + 7$, и по теореме Пифагора получаем $(x+7)^2 = (x+5)^2 + 12^2$. Решая полученное уравнение, находим $x = 30$ and $OR = 35$.
Теперь мы знаем две стороны прямоугольного треугольника OQR, и поэтому можем найти, что $OQ = \sqrt{QR^2 - OR^2} = \sqrt{91^2 - 35^2} = 84$; следовательно, радиус вписанной окружности треугольника OQR равен $\frac{84+35-91}{2} = 14$.
Треугольники OSP и OQR подобны, а их коэффициент подобия равен $\frac{OS}{OQ} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$. Итак, радиус окружности, вписанной в треугольник OPS есть $\frac{1}{7} \cdot 14 = 2$.

Problem Set 3

1. **[2 points]** Basil was slowly walking to school, and the first third of the way he was going at 2.16 km/h. Having understood that he was not going to be on time, he increased his speed up to 10.08 km/h, and he ran one third of the way with this speed. After that Basil got tired and he decreased his speed to 7.56 km/h, and he made the remaining third of the way with this speed. Determine Basil's average speed on his way to school.

   Answer: 4.32 km/h (or 1.2 m/s).

   Solution. Let the way Basil covered when walking to school be equal to $3S$ (km). Then he expended $\frac{S}{2.16}$ hours on the first part of the way, $\frac{S}{10.08}$ hours on the second part, and $\frac{S}{7.56}$ hours on the third part. In total, it took him $t = \frac{S}{2.16} + \frac{S}{10.08} + \frac{S}{7.56} = \frac{25S}{36}$ hours. Therefore, his average speed was equal to $\frac{3S}{t} = \frac{108}{25} = 4.32$ km/h.

2. **[2 points]** Three numbers X, Y, Z make up an arithmetic sequence in the indicated order. If we subtract 9, 18, 27 from them respectively, the numbers obtained make up a geometric sequence (in the same order). Find the largest possible value of the common difference of the arithmetic sequence. If it does not exist, write 2023 in the answer.

   Answer: 9.

   Solution. Three numbers make up an arithmetic sequence if and only if the middle one is equal to the half-sum of the other two numbers. Three numbers make up a geometric sequence if and only if the square of the middle number is equal to the product of the other two numbers. From here we get the equations $2Y = X + Z$ and $(Y - 18)^2 = (X - 9)(Z - 27)$. From the first equation we can express that $Z = 2Y - X$, and substituting it into the second equation, we obtain

$$(Y - 18)^2 = (X - 9)(2Y - X - 27) \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2XY + 18X - 18Y + 81 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X - Y)^2 + 18(X - Y) + 81 = 0 \Leftrightarrow (X - Y + 9)^2 = 0 \Leftrightarrow Y - X = 9.$$

   But the common difference of the arithmetic sequence is equal to the difference of the adjacent terms, and so we get that it is necessarily equal to $Y - X = 9$.

3. **[2 points]** Two tangent lines are drawn to parabola $y = 2x^2 - 3x$, the points of tangency being the intersection points of the parabola with x-axis. Find the area of a triangle formed with these lines and a straight line $y = 0$.

   Answer: 1.6875.

   Solution. The x-intercepts of the parabola are determined by the equation $2x^2 - 3x = 0$, from which we get two solutions $x_1 = 0$ and $x_2 = \frac{3}{2}$. As $y'(x) = 4x - 3$, we get that $y'(x_1) = -3$ and $y'(x_2) = 3$. These numbers are equal to the slopes of the tangent lines in question, hence the equations of these lines are $y = -3x$ and $y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$. The intersection point of these lines is $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{4}\right)$, which is one of the vertices of the triangle. Another two vertices have coordinates $A(0; 0)$ and $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. The base of the triangle AB is equal to $\frac{3}{2}$, and the altitude dropped onto it is equal to $\frac{9}{4}$. Hence, the area is equal to $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16} = 1.6875$.

4. **[3 points]** Numbers a, b satisfy the system of equations

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{a^2b^5} = 4(a^2 - b^2); \\ 5\sqrt[3]{a^4b} = a^2 + b^2. \end{cases}$$

   What is the largest value of the expression $b - 3a$?

   Answer: 112.

   Solution. If $a = 0$, then $b = 0$, and the value of the expression is equal to 0. If $a \neq 0$, then multiplying the equations we get $15a^2b^2 = 4\left(a^4 - b^4\right)$. Let us denote $t = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. The equation obtained can be written as $4t^2-15t-4=0$, and so $t=4$ or $t=-\frac{1}{4}$. Since $t\geq 0$, only the first of the roots is suitable, hence $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$, and therefore $a=\pm 2b$.

If $a=2b$, then substituting into the first equation of the initial system, we obtain $3\sqrt[3]{4b^7}=4\left(4b^2-b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b}=4$, and consequently, $b=16$ and then $a=32$. The value of the expression $(b-3a)$ becomes equal to (-80).

If $a=-2b$, then substituting into the first equation of the initial system, we obtain $3\sqrt[3]{4b^7}=4\left(4b^2-b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b}=4$, and consequently, $b=16$ and then $a=-32$. The value of the expression $(b-3a)$ becomes equal to 112.

The largest possible value of $(b-3a)$ is equal to 112.

5. **[3 points]** In triangle ABC it is known that $AB=19$, $BC=20$, $AC=37$. The incircle of the triangle touches its sides AB and AC at points Q and P respectively. Find area A of triangle APQ. In the answer write $111A$.

Answer: 5 832.

Solution. The semi-perimeter of the triangle is equal to $p=\frac{19+20+37}{2}=38$. Hence the area of the triangle is $A=\sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)}=114$. Let us denote the points of tangency of the incircle with the sides AB, AC, BC of the triangle as Q, P, S respectively. It is known that the tangent lines drawn to the circle from one point are equal to each other. So if we denote $AP=AQ=x$, we get $BQ=19-x$, $CP=37-x$, and consequently, $BC=BS+CS=BQ+CP=(19-x)+(37-x)=56-2x$. Thus $56-2x=20$ and $x=18$. Now we can express the ratio of areas of two triangles:

$$\frac{A_{APQ}}{A_{ABC}}=\frac{0.5AP\cdot AQ\cdot\sin A}{0.5AB\cdot AC\cdot\sin A}=\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}=\frac{18\cdot 18}{19\cdot 37}.$$

Therefore, $A_{APQ}=\frac{324}{19\cdot 37}\cdot 114=\frac{324\cdot 6}{37}$. The number to be written in the answer is $111A$ and it is equal to $324\cdot 6\cdot 3=5\,832$.

6. **[3 points]** Find the smallest positive solution of the equation

$$\frac{\cos(3x)}{\cos x}+\frac{2|\cos x|}{\cos(3x)}=-1.$$

In the answer write the solution found multiplied by $\frac{48}{\pi}$.

Answer: 32.

Solution. Let $t=\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

a) If $\cos x>0$, then $\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{2\cos x}{\cos 3x}=-1$, and the equation can be written as $t+\frac{2}{t}=-1$, откуда $t^2+t+2=0$. This equation has no real roots.

б) If $\cos x<0$, then $\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{2\cos x}{\cos 3x}=-1$, and the equation can be written as $t-\frac{2}{t}=-1$ или $t^2+t-2=0$, from where we get $t_1=-2$, $t_2=1$.

For $t=-2$ we obtain $\frac{\cos 3x}{\cos x}=-2$, which is equivalent to the equation $\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x}=-2$. As $\cos x<0$, we can proceed as follows: $4\cos^2 x-3=-2$, $\cos^2 x=\frac{1}{4}$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

For $t=1$ we have $4\cos^2 x-3=1$, $\cos^2 x=1$, $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

The smallest positive root of the equation is $x_0=\frac{2\pi}{3}$, and according to the task we need to write number $\frac{48}{\pi}\cdot x_0=32$ in the answer.

7. **[3 points]** How many integer values of x from the open interval $0<x<100$ satisfy the inequality

$$\frac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geq 4?$$

Answer: 68.

Solution. let $t=\log_2^2 x$, then the initial inequality can be written as $\frac{5t-100}{t-25}\geq 4\Leftrightarrow\frac{t}{t-25}\geq 0$. It yields $t\in(-\infty;0]\cup(25;+\infty)$. Returning to the initial variable, we obtain $x\in\left(0;\frac{1}{32}\right)\cup\{1\}\cup(32;+\infty)$. Among the solutions found, there are 68 integers that belong to the interval $x<100$.

8. **[3 points]** Find the number of integer values of parameter b such that the equation $\sin^{22} x + (b - 3\sin x)^{11} + \sin^2 x + b = 3\sin x$ has at least one solution.

Answer: 7.

Solution. The initial equation can be written as $\sin^{22} x + \sin^2 x = (3\sin x - b)^{11} + (3\sin x - b)$. Let us consider a function $f(t) = t^{11} + t$. Using it, we can rewrite the equation as $f\left(\sin^2 x\right) = f(3\sin x - b)$. Function f is strictly increasing (as a sum of two strictly increasing functions); thus the equality of the values of this function is equivalent to the equality of its arguments. Therefore, the initial equation is equivalent to the equation $\sin^2 x = 3\sin x - b$. From here $b = 3\sin x - \sin^2 x$. We only need to notice that function $y = \sin x$ has a range from -1 to 1, and function $g(y) = 3y - y^2$ is increasing on the interval $[-1; 1]$ (the latter fact can be justified using derivatives: $g'(y) = 3 - 2y > 0$ for $y \in [-1; 1]$). It takes values from -4 to 2. Therefore, the initial equation has solutions for $-4 \leq b \leq 2$. The number of integer solutions on the interval is equal to 7.

Problem Set 4

1. **[2 points]** Find the largest possible value of the expression $(x+2y)$ if numbers x and y satisfy the equalities $\sqrt{y}+10x=2.4$; $\left(\sqrt{y}-3\right)x=x-0.08$.

   Answer: 38.52.

   Solution. From the first equation we can express that $\sqrt{y}=2.4-10x$. Substituting it into the second equation yields $(-0.6-10x)x=x-0.08$. Solving the quadratic equation, we obtain $x=-\frac{1}{5}$ or $x=\frac{1}{25}$. If $x=-\frac{1}{5}$ then $y=\frac{484}{25}$, and the value of the expression $(x+2y)$ is equal to $\frac{963}{25}$. If $x=\frac{1}{25}$ then $y=4$ and the value of $(x+2y)$ is equal to $\frac{201}{25}$. Therefore, the largest possible value of $(x+2y)$ is $\frac{963}{25}=38.52$.

2. **[2 points]** Find the largest possible value of the expression $\frac{15}{p^{2/3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{p^4}-8\sqrt[3]{p}\cdot q}{p^{2/3}+2\sqrt[3]{pq}+4q^{2/3}}:\left(8-16\sqrt[3]{\frac{q}{p}}\right)$ if it is known that $3\leqslant p\leqslant 5$; $8\leqslant q\leqslant 19$.

   Answer: 1.875.

   Solution. The given expression can be transformed as follows:

$$\frac{15}{p^{2/3}}\cdot\frac{p^{4/3}-8p^{1/3}q}{p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}}:\frac{8p^{1/3}-16q^{1/3}}{p^{1/3}}=\frac{15}{8}\cdot\frac{p-8q}{\left(p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}\right)\left(p^{1/3}-2q^{1/3}\right)}=\frac{15}{8}.$$

   Hence, the expression is an identical constant on its domain and its largest value is equal to $\frac{15}{8}=1.875$.

3. **[2 points]** The volume of a regular triangular prism (the base of a prism is an equilateral triangle, and its lateral edges are perpendicular to its bases) is equal to $54\sqrt{3}$. What is the smallest possible value of the sum of all edges of the prism?

   Answer: 54.

   Solution. Let the edges of the base be equal to x and the altitude of the prism be equal to h. The volume of the prism is equal to $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$. From the task it s equal to $54\sqrt{3}$, and so we get $\frac{x^2h}{4}=54$, $h=\frac{216}{x^2}$. Now let us express the sum of all edges of the prism: $S=3h+6x=\frac{648}{x^2}+6x$. This sum happens to be a function of one variable x; its derivative is $S'(x)=-\frac{1296}{x^3}+6$. We can see that the derivative is negative for $x<6$, turns to zero at $x=6$, and is positive for $x>6$. Consequently, $x=6$ is a point of minimum of $S(x)$, and the smallest value of S is $S(6)=\frac{648}{36}+36=54$.

4. **[3 points]** How many integer values of x satisfy the inequality $\sqrt{\frac{18-x}{2+x}}>-x$?

   Answer: 20.

   Solution. The domain of the inequality is an interval $(-2;18]$. If $x\in(0;18]$, the left side of the inequality is non+negative, and its right side is negative. Consequently, all values of x that belong to the interval $(0;18]$ are the solutions of the initial inequality.
   Let $x\in(-2;0]$. Then $x+2>0$, and the initial inequality is equivalent to each of the following ones: $\frac{18-x}{2+x}>x^2$, $x^3+2x^2+x-18<0$. As $x=2$ is a root of the polynomial $P(x)=x^3+2x^2+x-18$, we can represent $P(x)$ in the form of $(x-2)(x^2+px+q)$. For finding the unknown coefficients p and q we can either use polynomial long division or expand the expression and equate the coefficients of resulting polynomials: $x^3+2x^2+x-18=x^3+(p-2)x^2+(q-2p)x-2q$, and from here $2=p-2$, $1=q-2p$, $-18=-2q$; hence $p=4$, $q=9$ and $P(x)=(x-2)(x^2+4x+9)=(x-2)\left((x+2)^2+5\right)$. Therefore inequality $P(x)<0$ implies that $x<2$. It means that all the values $x\in(-2;\,0]$ are the solutions of the initial inequality, and its solution set is a union of two intervals $(-2;\,0]$ and $(0;\,18]$, i.e. it is an interval $(-2;\,18]$. There are 20 integers on this interval.

5. **[3 points]** Solve the equation $\frac{\cos 3x - \sin x}{\cos 5x - \sin 3x} = 1$. In the answer write the sum of all roots of the equation that belong to a closed interval $3\pi \leqslant x \leqslant 15\pi$, multiplied by $\frac{3}{\pi}$.

Answer: 1 332.

Solution. The equation is equivalent to each of the following equations

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \sin 3x} = 1, \quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)} = 1,$$

and so $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$, или $\sin x \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. The roots of the latter equation are give by $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ and they all satisfy the restriction

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) \neq 0.$$

For finding the sum of the roots on the given interval ,let us consider each of the root sets separately:

$$3\pi + 4\pi + \ldots + 15\pi = \frac{3\pi + 15\pi}{2} \cdot 13 = 117\pi;$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{9\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{10\pi}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{44\pi}{3}\right) = 36 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}(9 + 10 + \ldots + 44) =$$
$$= 9\pi + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9 + 44}{2} \cdot 36 = 9\pi + 318\pi = 327\pi.$$

Now we only need to notice that the two sets of roots have an empty intersection (we can verify that it is so by plotting the trigonometric circle and placing all the roots there). Therefore, the sum of all the roots is equal to $117\pi + 327\pi = 444\pi$. As the answer, we need to write the number $\frac{3}{\pi} \cdot 444\pi = 1\,332$.

6. **[3 points]** How many integer values of x from the interval $0 < x < 100$ satisfy the inequality $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$?

Answer: 36.

Solution. Let $t = \log_8 x$. Then the inequality can be written as

$$\frac{t}{t-2} \geq \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2 - 2t}.$$

Moving all terms to the left side, bringing the fractions to the common denominator and simplifying, we obtain $\frac{(t-1)^2}{t(t-2)} \geq 0$, and so $t \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$. Going back to the initial variable, we have $x \in (0; 1) \cup \{8\} \cup (64; +\infty)$. Among the solutions found, there are 36 integers that belong to the interval $x < 100$.

7. **[3 points]** AM is a median of triangle ABC. Points F and T are projections of point M onto sides AB and AC respectively. Find the area A of triangle ABC, given that $AM = 13$, $AF = 2\sqrt{13}$, $AT = 12$. In the answer write the value of $23A$.

Answer: 2 535.

Solution. Let us extend median AM beyond point M and let D be such a point on the extension that $AM = MD$. Let us also denote $\angle BAM = \alpha$ and $\angle CAM = \beta$. In quadrilateral $ABDC$ diagonals bisect each other, therefore, it is a parallelogram. It is known that each of the diagonals in a parallelogram splits it into two equal triangles. It means that the area of triangle ABC is equal to the area of triangle ACD (for both of them are equal to half the area of the parallelogram).
Considering right triangles AMF and ATF we can express that $\cos\alpha = \frac{AF}{AM} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \frac{AT}{AM} = \frac{12}{13}$.

Therefore, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. Applying law of sines to triangle ACD, we get $\frac{AD}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$; hence $AC = 26\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} : \frac{46}{13\sqrt{13}} = \frac{507}{23}$. Finally, we have that the area of triangle ACD is equal to $A = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{507}{23}\cdot 26\cdot\frac{5}{13} = \frac{2\,535}{23}$. The value of $23A$ is $2\,535$.

8. **[3 points]** Find the sum of squares of all values of parameter t such that the equation

$$(x^2+x+2t^2+1)^2 = 8t^2(x^2+x+1)$$

has exactly one solution.

Answer: 0.75.

Solution. Let us make a substitution $y = x^2+x+1$. Then we get the equation $(y+2t^2)^2 = 8t^2y$, which can be transformed to $(y-2t^2)^2 = 0$, and from here we get $y = 2t^2$. Consequently, $x^2+x+1-2t^2 = 0$. This equation has exactly one solution if and only if its discriminant is equal to zero. We get $1-4(1-2t^2) = 0$; $8t^2 = 3$; $t = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Hence the sum of squares of all suitable values of parameter t is equal to 0.75.

Вариант 3

1. **[2 балла]** Вася шёл в школу не торопясь, и первую треть пути он прошёл со скоростью 2,16 км/ч. Поняв, что с такой скоростью он опоздает, он увеличил скорость до 10,08 км/ч и пробежал треть пути с этой скоростью. После этого Вася устал, и уменьшил скорость до 7,56 км/ч, и оставшуюся треть пути он проделал с этой скоростью. Определите среднюю скорость Васи по пути в школу.

   Ответ: 4,32 км/ч (или 1,2 м/с).

   Решение. Обозначим путь, который проделал Василий по пути в школу через $3S$ (км). Тогда он затратил $\frac{S}{2,16}$ часов на первую часть пути, $\frac{S}{10,08}$ часов на вторую часть пути и $\frac{S}{7.56}$ часов на третью часть. Суммарно ему потребовалось $t = \frac{S}{2,16} + \frac{S}{10,08} + \frac{S}{7,56} = \frac{25S}{36}$ часов. Отсюда его средняя скорость была равна $\frac{3S}{t} = \frac{108}{25} = 4,32$ км/ч.

2. **[2 балла]** Три числа X, Y, Z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если из них вычесть 9, 18, 27 соответственно, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию (в том же порядке). Найдите наибольшее возможное значение разности арифметической прогрессии. Если его не существует, укажите в ответе 2023.

   Ответ: 9.

   Решение. Три числа образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда среднее из них равно полусумме остальных. Три числа образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда квадрат среднего числа равен произведению двух других. Отсюда получаем уравнения $2Y = X + Z$ и $(Y-18)^2 = (X-9)(Z-27)$. Из первого уравнения можно выразить, что $Z = 2Y - X$, и подставляя это во второе уравнение, получаем

$$(Y-18)^2 = (X-9)(2Y-X-27) \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2XY + 18X - 18Y + 81 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X-Y)^2 + 18(X-Y) + 81 = 0 \Leftrightarrow (X-Y+9)^2 = 0 \Leftrightarrow Y - X = 9.$$

   Но разность арифметической прогрессии равна разности двух её соседних членов, и поэтому мы получаем один-единственный вариант: разность равна $Y - X = 9$.

3. **[2 балла]** К параболе $y = 2x^2 - 3x$ проведены касательные в её точках пересечения с осью абсцисс. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и прямой $y = 0$.

   Ответ: 1,6875.

   Решение. Абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox находятся из уравнения $2x^2 - 3x = 0$, откуда получаем два решения $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Так как $y'(x) = 4x - 3$, получаем, что $y'(x_1) = -3$ и $y'(x_2) = 3$. Эти числа и есть угловые коэффициенты искомых касательных, поэтому уравнения касательных имеют вид $y = -3x$ и $y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Точка пересечения касательных есть $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{4}\right)$, и она является одной из вершин треугольника. Две другие вершины имеют координаты $A(0;0)$ и $B\left(\frac{3}{2};0\right)$. Основание треугольника AB равно $\frac{3}{2}$, а высота, опущенная на него, есть $\frac{9}{4}$. Следовательно, площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16} = 1,6875$.

4. Числа a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{a^2b^5} = 4(a^2 - b^2); \\ 5\sqrt[3]{a^4b} = a^2 + b^2. \end{cases}$$

   Какое наибольшее значение может принимать выражение $b - 3a$?

   Ответ: 112.

   Решение. Если $a = 0$, то $b = 0$, и значение выражения равно 0. Если $a \neq 0$, то перемножим уравнения и получим $15a^2b^2 = 4\left(a^4 - b^4\right)$. Обозначим $t = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Тогда $4t^2 - 15t - 4 = 0$, откуда

$t = 4$ или $t = -\frac{1}{4}$. Так как $t \geqslant 0$, подходит только первый корень, поэтому $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 4$, откуда $a = \pm 2b$.
Если $a = 2b$, то подставляя в первое уравнение исходной системы, получаем $3\sqrt[3]{4b^7} = 4\left(4b^2 - b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b} = 4$, значит, $b = 16$ и тогда $a = 32$. При этом выражение $(b - 3a)$ принимает значение (-80).
Если $a = -2b$, то подставляя в первое уравнение исходной системы, получаем $3\sqrt[3]{4b^7} = 4\left(4b^2 - b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b} = 4$, значит, $b = 16$ и тогда $a = -32$. При этом выражение $(b - 3a)$ принимает значение 112.
Наибольшее возможное значение $(b - 3a)$ равно 112.

5. **[3 балла]** В треугольнике ABC известно, что $AB = 19$, $BC = 20$, $AC = 37$. Окружность, вписанная в треугольник, касается его сторон AB и AC в точках Q и P соответственно. Найдите площадь S треугольника APQ. В ответе запишите число $111S$.

Ответ: 5 832.

Решение. Полупериметр треугольника равен $p = \frac{19+20+37}{2} = 38$. Следовательно, его площадь равна $S = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114$. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, AC, BC треугольника через Q, P, S соответственно. Известно, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поэтому если обозначить $AP = AQ = x$, получаем $BQ = 19 - x$, $CP = 37 - x$, а значит, $BC = BS + CS = BQ + CP = (19 - x) + (37 - x) = 56 - 2x$. Следовательно, $56 - 2x = 20$ и $x = 18$. Теперь можем выразить отношение площадей треугольников:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \frac{0{,}5AP \cdot AQ \cdot \sin A}{0{,}5AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{18 \cdot 18}{19 \cdot 37}.$$

Therefore, $S_{APQ} = \frac{324}{19 \cdot 37} \cdot 114 = \frac{324 \cdot 6}{37}$. В ответе следует написать число $111S$; оно равно $324 \cdot 6 \cdot 3 = 5\,832$.

6. **[3 балла]** Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\frac{\cos(3x)}{\cos x} + \frac{2|\cos x|}{\cos(3x)} = -1$. В ответе укажите найденное решение, умноженное на $\frac{48}{\pi}$.

Ответ: 32.

Решение. Пусть $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.
а) Если $\cos x > 0$, то $\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{2\cos x}{\cos 3x} = -1$ и уравнение принимает вид $t + \frac{2}{t} = -1$, откуда $t^2 + t + 2 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней.
б) Если $\cos x < 0$, то $\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{2\cos x}{\cos 3x} = -1$ и уравнение принимает вид $t - \frac{2}{t} = -1$ или $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
При $t = -2$ получаем $\frac{\cos 3x}{\cos x} = -2$, что эквивалентно уравнению $\frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} = -2$. Так как $\cos x < 0$, то $4\cos^2 x - 3 = -2$, $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
При $t = 1$ имеем $4\cos^2 x - 3 = 1$, $\cos^2 x = 1$, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Наименьшим положительным корнем этого уравнения является $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, а согласно условию в ответ нужно записать число $\frac{48}{\pi} \cdot x_0 = 32$.

7. **[3 балла]** Сколько целых значений x из интервала $0 < x < 100$ удовлетворяет неравенству $\frac{5\log_2^2 x - 100}{\log_2^2 x - 25} \geqslant 4$?

Ответ: 68.

Решение. Пусть $t = \log_2^2 x$, тогда $\frac{5t-100}{t-25} \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{t}{t-25} \geqslant 0$. Отсюда $t \in (-\infty; 0] \cup (25; +\infty)$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем $x \in \left(0; \frac{1}{32}\right) \cup \{1\} \cup (32; +\infty)$. Среди найденных решений промежутку $x < 100$ принадлежат 68.

8. **[3 балла]** Найдите количество целых значений параметра b, при каждом из которых уравнение $\sin^{22} x + (b - 3\sin x)^{11} + \sin^2 x + b = 3\sin x$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 7.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^{22} x + \sin^2 x = (3\sin x - b)^{11} + (3\sin x - b)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^{11} + t$. Тогда уравнение принимает вид $f\left(\sin^2 x\right) = f(3\sin x - b)$. Функция f строго возрастает (как сумма двух строго возрастающих функций). Поэтому равенство значений функции эквивалентно равенству её аргументов, то есть данное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x = 3\sin x - b$. Получаем, что $b = 3\sin x - \sin^2 x$. Остаётся заметить, что функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1, а функция $g(y) = 3y - y^2$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$ (это можно установить, например, вычислив производную $g'(y) = 3 - 2y > 0$ при $y \in [-1; 1]$), принимая на нем все значения от -4 до 2. Поэтому исходное уравнение имеет решение при $-4 \leqslant b \leqslant 2$. Количество целых значений параметра, удовлетворяющих этому условию, равно 7.

Вариант 4.

1. **[2 балла]** Найдите наибольшее возможное значение выражения $(x+2y)$, если числа x и y удовлетворяют условиям $\sqrt{y}+10x=2{,}4$; $\left(\sqrt{y}-3\right)x=x-0{,}08$.

   Ответ: 38,52.

   Решение. Из первого уравнения можно выразить, что $\sqrt{y}=2{,}4-10x$. Подставляя во второе уравнение, имеем $(-0{,}6-10x)x=x-0{,}08$. Решая квадратное уравнение, получаем $x=-\frac{1}{5}$ или $x=\frac{1}{25}$. Если $x=-\frac{1}{5}$, то $y=\frac{484}{25}$, а значение выражения $(x+2y)$ равно $\frac{963}{25}$. Если $x=\frac{1}{25}$, то $y=4$ и значение выражения $(x+2y)$ равно $\frac{201}{25}$. Следовательно, наибольшее значение $(x+2y)$ – это $\frac{963}{25}=38{,}52$.

2. **[2 балла]** Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{15}{p^{2/3}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{p^4}-8\sqrt[3]{p}\cdot q}{p^{2/3}+2\sqrt[3]{pq}+4q^{2/3}}:\left(8-16\sqrt[3]{\dfrac{q}{p}}\right)$, если известно, что $3\leqslant p\leqslant 5$; $8\leqslant q\leqslant 19$.

   Ответ: 1,875.

   Решение. Данное выражение может быть преобразовано следующим образом:

   $$\frac{15}{p^{2/3}}\cdot\frac{p^{4/3}-8p^{1/3}q}{p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}}:\frac{8p^{1/3}-16q^{1/3}}{p^{1/3}}=\frac{15}{8}\cdot\frac{p-8q}{\left(p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}\right)\left(p^{1/3}-2q^{1/3}\right)}=\frac{15}{8}.$$

   Следовательно, на всей области определения это выражение равно тождественной константе, и его наибольшее значение – это $\frac{15}{8}=1{,}875$.

3. **[2 балла]** Объём правильной треугольной призмы (в основании призмы лежит равносторонний треугольник, а боковые рёбра перпендикулярны основаниям) равен $54\sqrt{3}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма длин всех её рёбер?

   Ответ: 54.

   Решение. Пусть рёбра основания равны x, а высота призмы равна h. Объём призмы равен $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$. По условию он равен $54\sqrt{3}$, поэтому получаем $\frac{x^2h}{4}=54$, $h=\frac{216}{x^2}$. Теперь выразим сумму длин всех рёбер призмы: $S=3h+6x=\frac{648}{x^2}+6x$. Эта сумма является функцией одной действительной переменной x; её производная равна $S'(x)=-\frac{1296}{x^3}+6$. Несложно видеть, что производная отрицательна при $x<6$, обращается в ноль при $x=6$ и положительна при $x>6$. Следовательно, $x=6$ – точка минимума функции $S(x)$, а наименьшее значение S – это $S(6)=\frac{648}{36}+36=54$.

4. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\sqrt{\frac{18-x}{2+x}}>-x$?

   Ответ: 20.

   Решение. ОДЗ неравенства – промежуток $(-2;18]$. Если $x\in(0;18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому все значения x из промежутка $(0;\ 18]$ – решения исходного неравенства. Пусть $x\in(-2;\ 0]$. Тогда $x+2>0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\frac{18-x}{2+x}>x^2$, $x^3+2x^2+x-18<0$. Так как $x=2$ — корень многочлена $P(x)=x^3+2x^2+x-18$, то $P(x)$ можно представить в виде $(x-2)(x^2+px+q)$. Для нахождения неизвестных коэффициентов p и q можно воспользоваться либо делением многочленов уголком, а можно раскрыть скобки и приравнять коэффициенты многочленов друг другу: $x^3+2x^2+x-18=x^3+(p-2)x^2+(q-2p)x-2q$, откуда $2=p-2$, $1=q-2p$, $-18=-2q$, а значит, $p=4$, $q=9$ и $P(x)=(x-2)(x^2+4x+9)=(x-2)\left((x+2)^2+5\right)$. Следовательно, неравенство $P(x)<0$ означает, что $x<2$. Отсюда все значения $x\in(-2;\ 0]$ – решения исходного неравенства, а его множество решений – объединение промежутков $(-2;\ 0]$ и $(0;\ 18]$, т.е. промежуток $(-2;\ 18]$. Количество целых чисел на этом промежутке равно 20.

5. **[3 балла]** Решите уравнение $\frac{\cos 3x - \sin x}{\cos 5x - \sin 3x} = 1$. В ответе укажите сумму корней уравнения, лежащих на отрезке $3\pi \leqslant x \leqslant 15\pi$, умноженную на $\frac{3}{\pi}$.

Ответ: 1 332.

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих уравнений

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \sin 3x} = 1, \quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)} = 1,$$

откуда $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$, или $\sin x \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Корни последнего уравнения $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) \neq 0.$$

Для нахождения суммы корней уравнения на отрезке рассмотрим для начала каждую из серий по отдельности:

$$3\pi + 4\pi + \ldots + 15\pi = \frac{3\pi + 15\pi}{2} \cdot 13 = 117\pi;$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{9\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{10\pi}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{44\pi}{3}\right) = 36 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}(9 + 10 + \ldots + 44) =$$
$$= 9\pi + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9 + 44}{2} \cdot 36 = 9\pi + 318\pi = 327\pi.$$

Остаётся заметить, что найденные серии решений не пересекаются (это можно установить, например, изобразив все решения на тригонометрической окружности). Значит, сумма всех решений на данном промежутке есть $117\pi + 327\pi = 444\pi$. В ответе необходимо записать число $\frac{3}{\pi} \cdot 444\pi = 1\,332$.

6. **[3 балла]** Сколько целых значений x из интервала $0 < x < 100$ удовлетворяет неравенству $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geqslant \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$?

Ответ: 36.

Решение. Пусть $t = \log_8 x$. Тогда неравенство принимает вид

$$\frac{t}{t-2} \geqslant \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2 - 2t}.$$

Перенося все члены в одну сторону, приводя к общему знаменателю и упрощая, имеем $\frac{(t-1)^2}{t(t-2)} \geqslant 0$, откуда $t \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $x \in (0; 1) \cup \{8\} \cup (64; +\infty)$. Среди найденных решений промежутку $x < 100$ принадлежат 36.

7. **[3 балла]** В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точки F и T – проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $AM = 13$, $AF = 2\sqrt{13}$, $AT = 12$. В ответе запишите величину $23S$.

Ответ: 2 535.

Решение. Продолжим медиану AM за точку M и пусть D – такая точка на продолжении, что $AM = MD$. Обозначим также $\angle BAM = \alpha$, а $\angle CAM = \beta$. В четырёхугольнике $ABDC$ диагонали точкой пересечения делят друг друга пополам, поэтому он является параллелограммом. Известно, что каждая из диагоналей делит параллелограмм на два равных треугольника. Это означает, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ACD (так как обе площади равны половине площади параллелограмма).
Рассматривая прямоугольные треугольники AMF и ATF, можем выразить, что $\cos\alpha = \frac{AF}{AM} =$

$\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \frac{AT}{AM} = \frac{12}{13}$. Значит, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. Применяя к треугольнику ACD теорему синусов, имеем $\frac{AD}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$; следовательно, $AC = 26\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} : \frac{46}{13\sqrt{13}} = \frac{507}{23}$. Окончательно получаем, что площадь треугольника ACD равна $A = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{507}{23}\cdot 26\cdot\frac{5}{13} = \frac{2\,535}{23}$. Значение выражения $23A$ есть $2\,535$.

8. **[3 балла]** Найдите сумму квадратов значений параметра t, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+x+2t^2+1)^2 = 8t^2(x^2+x+1)$$

имеет ровно один корень.

Ответ: 0,75.

Решение. Сделаем замену $y = x^2+x+1$. Тогда получим уравнение $(y+2t^2)^2 = 8t^2y$, которое преобразуется к виду $(y-2t^2)^2 = 0$, откуда $y = 2t^2$. Значит, $x^2+x+1-2t^2 = 0$. Это уравнение имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Получаем $1-4(1-2t^2) = 0$; $8t^2 = 3$; $t = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Значит, сумма квадратов искомых значений параметра t равна 0,75.